

На правах рукописи

**Ахтареев Айдар Азатович**

**НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ  
ЖИДКОСТИ В НЕНАСЫЩЕННОЙ  
ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань — 2011

Работа выполнена в ФГАОУВПО “Казанский (Приволжский) Федеральный университет”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Даутов Рафаил Замилович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Якимов Николай Дмитриевич  
  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Беляев Алексей Юрьевич


Ведущая организация: ИММ КазНЦ РАН, г. Казань

Защита диссертации состоится 27 октября 2011 г. в 14<sup>30</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском (Приволжском) Федеральном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского (Приволжского) Федерального университета.

Автореферат разослан 26 сентября 2011 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета,  
д.ф.-м.н., профессор



О. А. Задворнов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Классическая математическая модель совместного течения несмешивающихся жидкостей в пористой среде была построена в тридцатых – сороковых годах прошлого столетия известными американскими учеными М. Мускатом, М. Левереттом и их коллегами. Эта модель основана на предположении о локальном фазовом равновесии, согласно которому относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление могут быть выражены через универсальные функции, зависящие от локальной насыщенности. В случае, когда одна из жидкостей имеет малую вязкость, математическая модель была получена в 1931 г. и известна как модель Ричардса. Эта модель традиционно используется для описания процессов распространения влаги в подземной гидромеханике и гидрологии; ее определяющие уравнения известны также как уравнения ненасыщенной фильтрации.

Теория Муската – Леверетта имела и по сегодняшний день имеет важнейшее значение для инженерной практики. Однако, эта теория имеет ограничения, связанные с предположением о локальном равновесии: оно допустимо, если насыщенность не меняется заметным образом на расстояниях порядка размера поровых каналов. В действительности это не всегда так, и неравновесные эффекты должны быть учтены в модели. В связи с этим отметим задачу о противоточной капиллярной пропитке, имеющей важное значение для нефтедобычи<sup>1</sup>, а также задачу о неустойчивости гравитационных фронтов пропитки достаточно сухих пористых грунтов, имеющей важное значение для экологии (задача о пальцеобразовании<sup>2</sup>).

В диссертационной работе рассматриваются задачи влагопереноса в пористой среде. Развивая идеи Г.И. Баренблатта, мы предлагаем и исследуем модификацию классических уравнений Ричардса, учитывающую эффекты неравновесности. Достаточно веские экспериментальные свидетельства в пользу таких моделей собраны в обзорах S. M. Hassanizadeh, W. G. Gray (1993) и S. M. Hassanizadeh, M. A. Celia, H. G. Dahle (2002). Дополнительно отметим результаты наблюдений М. М. Абрамовой (1948), М. Аллера (1958), С. И. Дмитриева (1962) и Н. Ф. Бондаренко (1964), не вошедшие в эти обзоры.

---

<sup>1</sup>Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик Теория нест. фильт. жидкости и газа. М.: Недра, 1972.

<sup>2</sup>J. S. Selker, J.-Y. Parlange, T. Steenhuis Fingering flow in two dimensions, 2, Predicting moisture profile // Water Resour. Res., v. 28, n. 9, 1992. pp. 2523–2528.

Насколько нам известно, М. Аллер (M. Hallaire, 1960) был первым, кто ввел неравновесное капиллярное соотношение вида

$$p = -P^c(s) + \tau \dot{s}, \quad (1)$$

где  $\tau > 0$  — некий варьируемый коэффициент,  $P^c(s)$  — капиллярная функция. Правую часть этого соотношения Аллер называл эффективным потенциалом влажности. Комбинация этого уравнения с уравнением баланса массы  $\dot{s} + \nabla \cdot q = 0$  и закона Дарси  $q = -K(s)(\nabla p + e)$ , приводит к неравновесной модели фильтрации жидкости в ненасыщенной пористой среде (классическая модель Ричардса получается при  $\tau = 0$ ).

Независимо эта модель была получена М. Хассанизаде (M. Hassanizadeh) и В. Греем (W. G. Gray) в 1993 гг. Применяя методы неравновесной термодинамики к процессам перераспределения влаги в поровом пространстве, они получили энтропийное неравенство

$$(p + P^c(s)) \dot{s} \geq 0,$$

ограничивающее возможные модификации равновесного капиллярного соотношения. Соотношение (1) находится в согласии с этим неравенством; правая часть соотношения (1) была названа ими динамическим капиллярным давлением. Позднее, эта модель исследовалась как теоретически (А.Ю. Беляев, J. Hulshof, R. J. Shottling, J. Nieber, Р.З. Даутов, А.Г. Егоров и др.), так и на основе вычислительных экспериментов (J. Nieber, Р.З. Даутов, А.Г. Егоров, G. C. Sander, M. Chapwanya, J. M. Stockie и др.).

Г. И. Баренблаттом в 1971 г. была предложена неравновесная модель двухфазной фильтрации, которая развивается и изучается и по сегодняшний день. Согласно этой модели, относительная проницаемость и капиллярное давление в модели Ричардса зависят не от актуальной насыщенности  $s$ , а от “эффективной”  $\eta = \tau \dot{s} + s$ , где  $\tau > 0$  — дополнительный параметр пористой среды. С нашей точки зрения, появление модели Хассанизаде-Грея и интерес к ней во многом связан с тем, что оказалось, что такая модель Г. И. Баренблатта неспособна описать процесс пальцеобразования в пористой среде.

Среди других подходов к модификации модели Ричардса отметим статьи А. В. Лыкова (Инженерно-физический журнал, п. 3, 1965.).

Всякая математическая модель должна быть тщательно протестирована и верифицирована по результатам различных натурных экспериментов.

Только после этого можно делать заключение о ее достоверности и практической применимости. Так, попытки верификации модели Хассанизаде-Грея по недавно полученным экспериментальным данным D.A. DiCarlo по гравитационной пропитке пористых грунтов были неудачными; ее удастся верифицировать лишь в небольшом диапазоне расходов жидкости. Предлагаемая нами модель лишена этого недостатка. Она имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{s} + \nabla \cdot q &= 0, \quad q = -K(s + \tau_K \dot{s})(\nabla p + e), \\ \tau \dot{s} + s &= S(p),\end{aligned}$$

где  $0 < \tau_K < \tau$ . Эта модель совпадает с моделью Г. И. Баренблатта, если принять  $\tau_K = \tau$ .

Изложенное выше определяет основные цели диссертационной работы.

**Целями** работы являются построение и исследование неравновесной математической модели влагопереноса в ненасыщенно-насыщенных пористых средах. Основное внимание уделяется следующим вопросам:

1. исследованию существования решения начально-краевых задач, соответствующих модели;
2. исследованию существования и качественных свойств частных решений уравнений в виде бегущих волн пропитки;
3. верификации модели по результатам натурных экспериментов по гравитационной пропитке ряда пористых сред;
4. разработке численных методов и комплекса программ для обеспечения вычислительных экспериментов.

**Научная новизна** результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем: построена неравновесная математическая модель влагопереноса в ненасыщенно-насыщенных пористых средах; доказано существование, единственность, описаны качественные свойства частных решений уравнений, соответствующих предложенной модели, в виде бегущих волн пропитки; проведена верификация модели по результатам лабораторных экспериментов по одномерной гравитационной пропитке ряда пористых сред; разработан численный метод для решения задач ненасыщенно-насыщенной фильтрации.

**Достоверность и обоснованность результатов**, полученных в диссертации, обеспечивается строгими доказательствами сформулированных утвер-

ждений, сравнением с известными данными экспериментальных и теоретических исследований других авторов, тестированием численных методов и программ на решениях модельных задач.

**Научное и практическое значение работы.** Результаты первых двух глав диссертации имеют теоретический характер. Результаты, полученные в них, вносят вклад в теорию фильтрации жидкости в ненасыщенных пористых средах. Численный метод, представленный в третьей главе, может быть использован в организациях и учреждениях, занимающихся моделированием течений в ненасыщенных пористых средах.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: на VI всероссийском семинаре “Сеточные методы для краевых задач и приложения”, (Казань, 2004); на Международном семинаре “Recent Advances in Multi-phase Flow in Porous Media” (Казань, 2004); на Международном семинаре “Upscaling Flow and Transport Process in Porous Media” (Delft, 2005); на Всероссийской молодёжной школе-конференции “Численные методы решения задач математической физики” (Казань, 2006); на Международном семинаре “Summer School on Upscaling and Modelling of Coupled Transport Processes in the Subsurface” (Utrecht, 2006); на VII всероссийском семинаре “Сеточные методы для краевых задач и приложения” (Казань, 2007); на VIII молодежной школе-конференции “Лобачевские чтения 2009” (Казань, 2009); на VIII Всероссийской конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения” (Казань, 2010); на итоговых научных конференциях Казанского федерального университета (2003-20011); а также на семинарах кафедры вычислительной математики и отделения механики НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва Казанского федерального университета.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в семи статьях и двух тезисах, в том числе одна статья в журнале, входящем в список ВАК РФ. Совместные работы выполнены в соавторстве с научным руководителем, которому в этих работах принадлежит постановка задач, выбор направлений и методов исследования.

**Благодарности.** Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00516) и международного проекта РФФИ и NWO (Нидерланды, 05-01-890001-NWO).

**Структура диссертационной работы.** Диссертационная работа состоит из списка обозначений, введения, трёх глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 134 страницы и содержит 47 рисунков и 3 таблицы. Библиография включает 99 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, дан обзор литературы по теме исследования, определены цели и задачи исследования, изложено краткое содержание работы по главам.

**Первая глава** посвящена определению предлагаемой математической модели для описания влагопереноса в ненасыщенно-насыщенных пористых средах и его теоретическому исследованию. Она состоит из 4-х параграфов.

Первый параграф является вводным: в нем определяется классическая модель Ричардса в размерной и безразмерной форме и описывается гистерезис в капиллярном соотношении. Дается описание подходов Муалема и Скотта учета капиллярного гистерезиса, основанных на идеях самоподобия, а также определяется идеализированная модель капиллярного гистерезиса  $p_{\text{лау}}$ , предложенная для задач влагопереноса А.Ю. Беляевым.

Модель Ричардса для описания влагопереноса в однородной и изотропной пористой среде определяется уравнениями (в безразмерной форме)

$$\begin{aligned}\dot{s} + \nabla \cdot q &= 0, \quad q = -K(s)(\nabla p + e), \\ s &= S(p),\end{aligned}$$

представляющими собой баланс массы, закон Дарси и равновесное капиллярное соотношение соответственно. При учете капиллярного гистерезиса последнее уравнение записывается в виде

$$s = S_{[0,t]}(p, \text{sign}(\dot{s})).$$

Здесь  $s$  есть функция насыщенности,  $s \in [0, 1]$ ,  $p$  — давление жидкости, орт оси координат  $e$  направлен против силы тяжести. Гидравлические функции  $K$  и  $S$  определяются пористой средой и имеют характерное поведение: функция  $K$ , определенная на отрезке  $[0, 1]$ , является возрастающей, липшицевой, причем  $K(0) = 0$ ; функция  $S(p)$  определена на всей оси, является неубывающей,  $S(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow -\infty$ ,  $S(p) = 1$  при  $p$  больших некоторого  $p_e \leq 0$ .

§ 2 посвящен описанию известных релаксационных модификаций капиллярного соотношения (Г.И. Баренблатта, Хассанизаде-Грея), а также соответствующих им неравновесных моделей фильтрации (как без учета, так и с учетом капиллярного гистерезиса). Здесь же дается определение предлагаемой нами модели влагопереноса, имеющей следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{s} - \nabla \cdot K(s + \tau_K \dot{s})(\nabla p + e) &= 0, \\ \tau \dot{s} + s &= S(p).\end{aligned}$$

Она содержит дополнительные положительные числовые параметры  $\tau$  и  $\tau_K$ . При учете капиллярного гистерезиса последнее уравнение записывается как

$$\tau \dot{s} + s = S_{[0,t]}(p, \text{sign}(\dot{s})).$$

При  $\tau = \tau_K = 0$  эта модель совпадает с моделью Ричардса, при  $\tau = \tau_K > 0$  она приводит к модели Г.И. Баренблатта, при  $\tau > 0$ ,  $\tau_K = 0$  соответствующая модель была предложена Р.З. Даутовым и А.Г. Егоровым.

Заканчивается параграф замечаниями по поводу формальной корректности этой модели. Показывается, что ограничение  $\tau_K \leq \tau$  является необходимым, и если функции  $s, p$  удовлетворяют уравнениям, то автоматически  $s \in [0, 1]$ , согласно смыслу неизвестной  $s$ .

В § 3 изучаются вопросы существования и единственности обобщенных решений начально-краевых задач, соответствующих этой модели. Нам не удалось провести исследование разрешимости во всем диапазоне параметров для “реалистичной” модели гистерезиса типа Муалема. Рассмотрены отдельно случаи  $0 < \tau_K = \tau$  и  $0 \leq \tau_K < \tau$ . В первом случае капиллярный гистерезис игнорируется, но допускаются наличие сухих зон в области течения (зон, где  $s = 0$ ); во втором — рассматривается задача без гистерезиса и с гистерезисом play (при  $\tau_K = 0$ ) в предположении, что начальная насыщенность положительна. Считается, что пористая среда занимает область  $\Omega \subset R^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  — ограниченную связную область с липшицевой границей  $\Gamma$ , и задан ограниченный интервал времени  $[0, T]$ , в течение которого рассматривается процесс фильтрации жидкости в этой области.

В первом случае искомая начально-краевая задача заключается в определении функций  $p = p(x, t)$  и  $s = s(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ , удовлетво-



ряющих при всех  $x \in \Omega$  и  $t \in (0, T]$  уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{s} - \nabla \cdot K(S(p))(\nabla p + e) &= 0, \\ \tau \dot{s} + s &= S(p),\end{aligned}$$

начальному условию  $s|_{t=0} = s_0$  и краевым условиям при  $t \in (0, T]$ :

$$\begin{aligned}p &= p_D, \quad x \in \Gamma_D, \quad q \cdot \nu = 0, \quad x \in \Gamma_n, \quad q \cdot \nu + q_i = 0, \quad x \in \Gamma_i, \\ q \cdot \nu &\in q_v H(S(p)), \quad x \in \Gamma_v, \quad p \leq 0, \quad q \cdot \nu \geq 0, \quad p(q \cdot \nu) = 0, \quad x \in \Gamma_a.\end{aligned}$$

Здесь  $q = -K(S(p))(\nabla p + e)$ ;  $p_D \leq 0$ ,  $q_v > 0$ ,  $q_i > 0$  — заданные функции;  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_n \cup \Gamma_i \cup \Gamma_v \cup \Gamma_a$ ;  $H$  — многозначная в нуле функция Хевисайда.

На гидравлические функции  $K$  и  $S$  накладываются обычные требования, принятые в теории пористых сред; из них используются лишь следующие:

( $H_1$ ) функция  $K$  определена на  $[0, 1]$ , является возрастающей, липшицевой и дифференцируемой в малой окрестности нуля,  $K(0) = 0$ ,  $K(1) = 1$ ;  $S$  является неубывающей и липшицевой на  $R$ ; найдется  $p_e \leq 0$  такое, что  $S(p) = 1$  при  $p \geq p_e$ ,  $S(p) < 1$  при  $p < p_e$ ;

( $H_2$ )  $K(s) \sim s^\alpha$  при малых  $s$ ,  $S(p) \sim (-p)^{-\beta}$  при  $p \rightarrow -\infty$ , причем  $\alpha\beta > 1$ .<sup>3</sup>

Относительно других данных задачи предполагается, что

( $H_3$ )  $0 \leq s_0 = s_0(x) \leq 1$  п. вс. в области  $\Omega$ ;

( $H_4$ ) мера Лебега множества  $\Gamma_D$  больше нуля;  $p_D = p_D(x) \in H^1(\Omega)$ ;  $q_v = q_v(x) \in L_2(\Gamma_v)$ ,  $q_i = q_i(x) \in L_2(\Gamma_i)$ .<sup>4</sup>

При исследовании этой задачи вводится новая неизвестная  $u$  вместо  $p$ , согласно преобразованию Кирхгофа,

$$u = U(p) = \int_{-\infty}^p K(S(\xi)) d\xi, \quad p \in R,$$

---

<sup>3</sup> $f \sim g$  означает, что  $f = cg + o(g)$  с некоторой постоянной  $c > 0$ .

<sup>4</sup>Предположение о независимости  $p_D$ ,  $q_v$  и  $q_i$  от переменной  $t$  делается для облегчения изложения и не является принципиальным.

а также функции  $\mathcal{S}(u) = S(P(u))$ ,  $\mathcal{K}(u) = K(\mathcal{S}(u))$ , где  $P$  является обратной к  $U$ . Показывается, что обобщенное решение задачи в новых переменных может быть определено как решение следующей задачи: требуется найти такую пару функций  $(s, u) \in C^1([0, T]; L_\infty(\Omega)) \times C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap \mathbb{K}$ , что

$$\tau \dot{s} + s = \mathcal{S}(u), \quad s|_{t=0} = s_0,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \mathcal{S}(u)(v - u) + \tau (\nabla u + \mathcal{K}(u)e) \cdot \nabla(v - u) \right) dx + \int_{\Gamma_v} \tau q_v(v^+ - u^+) dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} \varphi(s)(v - u) dx + \int_{\Gamma_i} \tau q_i(v - u) dx \quad \forall v \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

где  $s^+ = \max\{s, 0\}$ ,  $\varphi(s) = \min\{s^+, 1\}$ ,

$$\mathbb{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = u_D, \quad v|_{\Gamma_a} \leq u_a\}, \quad u_D = U(p_D), \quad u_a = U(0),$$

есть выпуклое и замкнутое подмножество в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$ . После изучения качественных свойств решений этой задачи доказывается

**Теорема 1.** *Обобщенное решение сформулированной выше задачи существует и единственно. Кроме того, если  $(s, u)$  и  $(\hat{s}, \hat{u})$  есть решения, соответствующие начальным данным  $s_0$  и  $\hat{s}_0$  соответственно, то*

$$\max_{t \in [0, T]} \|\hat{s}(t) - s(t)\|_{L_1(\Omega)} \leq \|\hat{s}_0 - s_0\|_{L_1(\Omega)}.$$

В дополнение к теореме устанавливается также регулярность (дополнительная гладкость) обобщенного решения.

При  $0 \leq \tau_K < \tau$  изучалась следующая начально-краевая задача:

$$\dot{s} - \nabla \cdot K(s + \tau_K \dot{s})(\nabla p + e) = 0,$$

$$\tau \dot{s} + s = S(s, p),$$

$$s|_{t=0} = s_0, \quad p = p_D, \quad x \in \Gamma_D, \quad q \cdot \nu + q_N = 0, \quad x \in \Gamma_N.$$

Здесь  $p_D, q_N$  — заданные функции,  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $s^- = s^+ - s$ ,

$$q = -K(s + \tau_K \dot{s})(\nabla p + e), \quad S(s, p) = s + (S_w(p) - s)^+ - (S_d(p) - s)^-,$$

$S_w$  и  $S_d$  есть главные кривые пропитки и дренажа. Эта задача соответствует гистерезису play в капиллярном соотношении; задача без гистерезиса получается, если положить  $S_w = S_d$ .

Исследования проводятся при следующих условиях на данные:

( $U_1$ ) функции  $K$ ,  $S_w$  и  $S_d$  являются неубывающими и липшицевыми с областью значений  $[0, 1]$ ;  $K$  определена на  $[0, 1]$ ,  $K(0) = 0$ ;  $S_d \geq S_w$ ,  $S_w(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow -\infty$ .

( $U_2$ )  $0 < \delta \leq s_0 = s_0(x) \leq 1$  п. вс. в области  $\Omega$ ,  $\delta = \text{const}$ ;

( $U_3$ )  $|\Gamma_D| > 0$ ;  $\Gamma_D$  имеет липшицевую границу;  $p_D = p_D(x) \in W_\infty^1(\Omega)$ ;  $q_N = q_N(x) \in L_2(\Gamma_N)$ .

Для этой задачи дается определение обобщенного решения  $(s, p)$ , принадлежащего пространству  $C^1([0, T]; L_\infty(\Omega)) \times C([0, T]; H^1(\Omega))$ . Его существование доказывается в случае задачи без гистерезиса, а также с гистерезисом play при  $\tau_K = 0$ . В последнем случае также устанавливается единственность решения для одномерных и двумерных течений (при  $d = 1, 2$ ).

В § 4 изучаются вопросы существования, единственности, а также качественные свойства частных решений сформулированной нами модели в виде бегущих в направлении силы тяжести волн пропитки.

Пусть  $x_n$  — координата, направленная против силы тяжести; изучаются решения вида  $p = p(x_n + vt)$ ,  $s = s(x_n + vt)$ ,  $v = \text{const}$ , уравнений

$$\begin{aligned} \dot{s} - \nabla \cdot K(s + \tau_K \dot{s})(\nabla p + e) &= 0, \\ \tau \dot{s} + s &= S_{[0,t]}(p, \text{sign}(\dot{s})), \end{aligned}$$

в предположении, что на бесконечности пористая среда равновесна, то есть  $s'(\pm\infty) = p'(\pm\infty) = 0$ , и  $s(-\infty) = s_-$ ,  $s(+\infty) = s_+$ ,  $0 < s_- < s_+ < 1$ .

Такие автомодельные решения представляют большой интерес в связи с задачами инфильтрации жидкости в пористую среду при учете силы тяжести (гравитационная пропитка). По единой схеме изучаются как задачи без гистерезиса, так и с гистерезисом; исследуется зависимость волны пропитки от параметров модели. Основное внимание уделяется определению диапазона параметров, при которых волна пропитки является немонотонной.

Соответствующая математическая задача сводится к краевой задаче на оси для планарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование этой системы проводится методами качественной теории; при этом важную роль играют ее особые точки и изоклины в зависимости от параметров модели. Следующая теорема доказана для задачи без гистерезиса.

**Теорема 2.** *При  $\tau > 0$ ,  $\lambda = \tau_K/\tau \in [0, 1]$  существует волна пропитки  $(s, p) \in C^{1,1}(R) \times C^{1,1}(R)$ . Она единственна с точностью до сдвига и  $s_- \leq s \leq 1$ . Кроме того,*

*а) при  $\lambda \in [\lambda_m, 1]$  профили давления и насыщенности  $(p, s)$  являются монотонными при любом  $\tau > 0$ ;*

*б) при  $\lambda \in [0, \lambda_m]$  найдутся такие  $\tau_1(\lambda)$  и  $\tau_2(\lambda)$ , что как  $p$ , так и  $s$  являются немонотонными при  $\tau \in (\tau_1(\lambda), \tau_2(\lambda))$ .*

Для  $\lambda_m$ ,  $\tau_1(\lambda)$  и  $\tau_2(\lambda)$  указаны соответствующие формулы.

Аналогичная теорема доказана для задачи с гистерезисом play, и несколько более слабая теорема для модели с “реалистичным” гистерезисом Скотта.

**Вторая глава** работы посвящена верификации предложенной модели и моделированию на ее основе явления пальцеобразования в пористой среде. Она состоит из 5-и параграфов.

Первый параграф посвящен описанию известных квазидвумерных лабораторных экспериментов по пальцеобразованию в ненасыщенных пористых средах, а § 2 — описанию связанных с ними квазиодномерных экспериментов D.A. DiCarlo по гравитационной пропитке пористых сред. Результаты этих экспериментов, в силу своей полноты и систематичности, предоставляют хорошую базу для верификации теоретических моделей.

Типичная экспериментальная установка для изучения пальцеобразования при гравитационной пропитке однородных ненасыщенных пористых грунтов представляет собой ячейку Хеле-Шоу, заполненную сухим песком (как правило грубозернистым), и ориентированную вертикально. К верхней границе ячейки подается постоянный поток влаги  $q$ ,<sup>5</sup> в результате чего, под действием гравитации, в среде формируется одномерная волна смачивания (волна инфильтрации, волна пропитки), однородная по ширине ячейки, движущаяся с постоянной скоростью  $v$  в направлении гравитации. С течением времени

---

<sup>5</sup>при изучении отдельных пальцев — точно

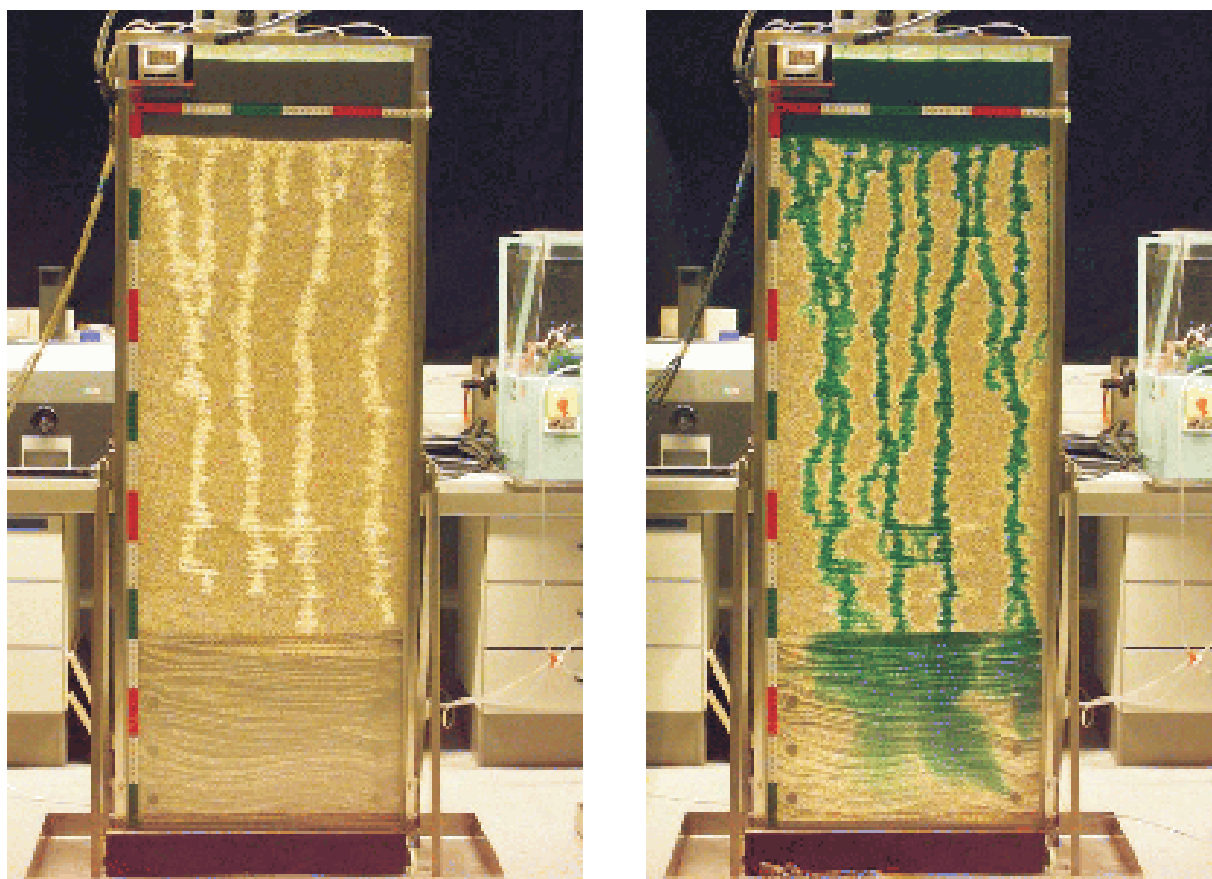


Рис. 1: Пальцеобразование в ячейке Хеле-Шоу (слева). Быстрый перенос “загрязнения” по пальцам (справа).

эта волна теряет устойчивость и распадается на периодическую систему автономно развивающихся узких зон повышенной влажности (“пальцев”).

На рис. 1 представлена компьютеризированная установка, которая позволяет получать визуализацию процесса пропитки и типичный результат экспериментального моделирования указанного выше явления (из работы<sup>6</sup>; Light Transmission Method, размеры ячейки  $160 \times 60 \times 0.3$  см.). Поток в верхней части (однородный) разбивается на пальцы примерно одинаковой толщины (светлые области), которые развиваются независимо с постоянной скоростью, причем насыщенность жидкостью в теле пальца постоянна (значительно выше фона), за исключением “головки” пальца (самой нижней части), где она выше, чем в теле. После достижения нижнего структурированного слоя пальцы разрушаются. Интерес к рассматриваемому феномену дополнительно поясняет правый рис. 1. После достижения стационарного течения в ячейке, в

<sup>6</sup>F. Rezanezhad, H. Vogel, K. Roth Experimental study of fingered flow through initially dry sand // Hydrol. Earth Syst. Sci. Discuss., n. 3, 2006. pp. 2595-2620.

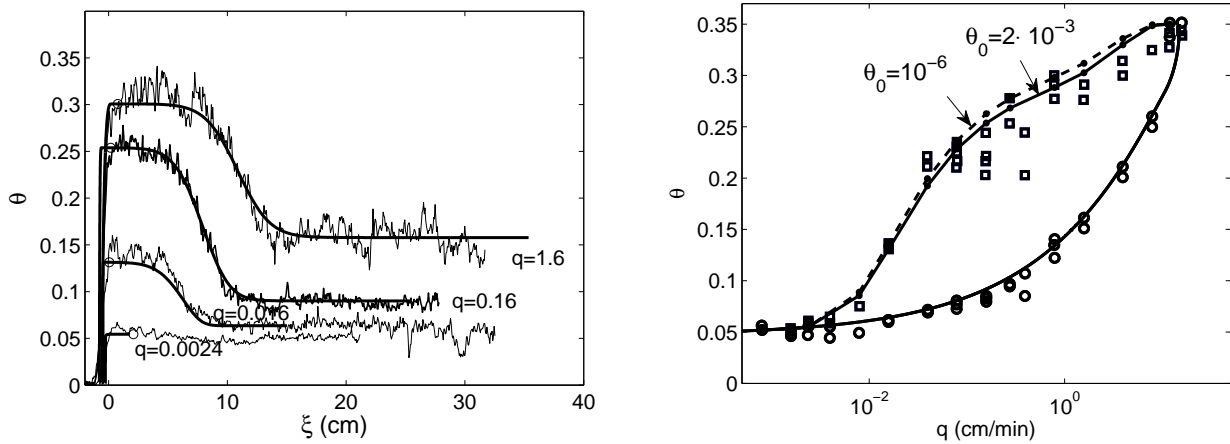


Рис. 2: Слева: рассчитанные и экспериментальные профили водонасыщенности при различных  $q$  для среды 20/30 (начальная водонасыщенность  $\theta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ ). Справа: рассчитанные и экспериментальные зависимости водонасыщенности в голове и хвосте пальца от расхода  $q$ .

верхний слой добавляется краситель (загрязнитель). Эксперимент показывает, что краситель распространяется по пальцам, причем, переносится с высокой скоростью по центральной части пальцев, тогда как границ пальцев достигает с существенно меньшей скоростью за счет диффузии.

Экспериментальная установка в опытах D.A. DiCarlo<sup>7</sup>, позволяющая изучать одиночные пальцы, включает стеклянную трубку длиной  $L = 40$  см. и диаметром около 1 см., установленную вертикально и заполненную сухим песком. В качестве заполнителя использовались лабораторные пески различных типов. С верхнего конца в трубку с заданным постоянным расходом  $q$  подавалась вода. Величина  $q$  менялась значительно, в пределах от  $10^{-3}$  до  $10^2$  мл/мин. В этих условиях в трубке образовывался ярко выраженный фронт насыщенности, передвигающийся вниз со скоростью  $v$ , которая является постоянной для данной величины  $q$ . На левом рис. 2 представлен характерный вид таких профилей (ломаные) для песка 20/30 и ряда значений расхода  $q$  ( $\theta = \phi s$  — водонасыщенность,  $\phi = 0.35$  — пористость).

Третий параграф 2-ой главы посвящен верификации построенной в предыдущей главе неравновесной модели влагопереноса на основе этих экспериментов D. A. DiCarlo. Здесь описывается выбранный численный метод реше-

<sup>7</sup>D. A. DiCarlo Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration// Water Resour. Res., v. 40, n. 4, 2004. pp.147–172.

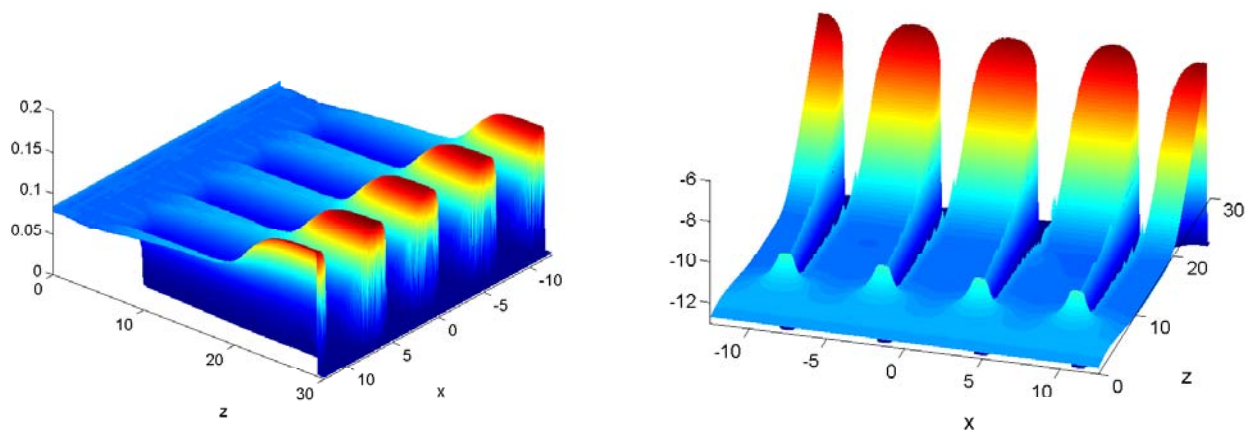


Рис. 3: Поле водонасыщенности (слева) и давления (справа). Среда 20/30,  $q_0 = 0.06$ ,  $\theta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ .

ния задачи верификации, а также параметризация гидравлических функций  $K$ ,  $S_w$  и  $S_d$  (используются формулы Ван-Генухтена и модель гистерезиса П. Скотта). Далее дается описание результатов верификации модели для трех типов сред. Часть этих результатов представлена на рис. 2. Результаты верификации свидетельствуют о том, что построенная модель пригодна для описания экспериментальных данных D. A. DiCarlo в достаточно широком диапазоне изменения расходов.

В 4-м параграфе устанавливается (на основе вычислительных экспериментов), что решение одномерной нестационарной задачи инфильтрации жидкости в пористую среду с постоянным расходом, согласно нашей модели, выходит на автомоделный режим при больших значениях времени и представляет собой волну пропитки. Описывается разработанный нами численный метод решения задачи с учетом капиллярного гистерезиса.

В 5-ом, заключительном параграфе 2 главы, моделируются эксперименты по пальцеобразованию, описанные выше. На рис. 3-5 приведены результаты одного вычислительного эксперимента.

Первоначально теоретически анализируется устойчивость однородного одномерного потока жидкости. На физическом уровне строгости, используя линейную теорию устойчивости, выводится критерий устойчивости, согласно которому немонотонные решения оказываются неустойчивыми. Далее описывается численный метод решения спектральной задачи и вычисляется основная дисперсионная кривая для конкретной пористой среды. Вычисления

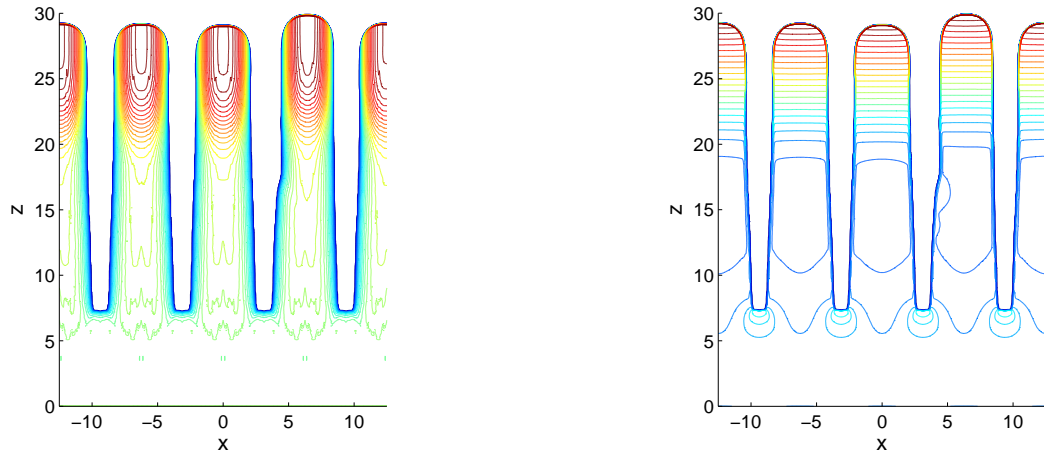


Рис. 4: Изолинии водонасыщенности (слева) и давления (справа). Среда 20/30,  $q_0 = 0.06$ ,  $\theta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ .

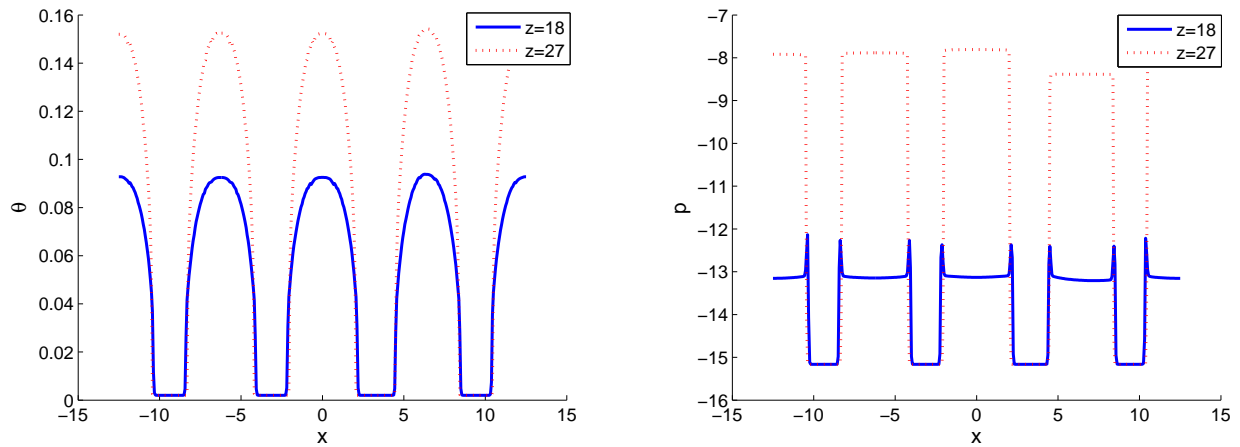


Рис. 5: Водонасыщенность (слева) и давление (справа) в поперечном сечении при двух значениях  $z$ . Среда 20/30,  $q_0 = 0.06$ ,  $\theta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ .



показывают, что имеется характерное значение частоты возмущений, при которой возмущения растут быстрее всего. Из этих исследований вытекает, что немонотонные решения (немонотонные волны пропитки) условно неустойчивы и должны эволюционировать в “пальцеобразные” решения. Это утверждение полностью согласуется с результатами экспериментальных работ.

Заканчивается параграф описанием разработанного нами численного метода и результатов двумерных вычислительных экспериментов. Расчеты по верифицированной модели подтвердили, что выявленная неустойчивость фронта пропитки приводит к его распаду на систему устойчиво развивающихся пальцев. При этом важную роль играет гистерезис в капиллярном соотношении (он определяет механизм сохранности нарождающихся в силу неустойчивости пальцев). Морфологические особенности пальца (область питания, тело пальца, головка пальца) качественно совпадают с выявленными в экспериментах, а профиль влажности вдоль оси пальца — с полученным в результате решения автомодельной задачи.

Из результатов вычислительных экспериментов следует, что предложенная нами модель качественно верно описывает феномен пальцеобразования.

**Третья глава** посвящена численному методу решения задач ненасыщенно-насыщенной фильтрации. Она состоит из 6-и параграфов. Метод основан на предложенной нами новой формулировке задачи, которая получается из исходной введением вместо функции давления новой неизвестной, совпадающей с насыщенностью среды в одних подобластях области течения и с “нормированным” давлением — в других. Первоначально, после обзора известных подходов к построению численных методов (§ 1), дается описание новой формулировки задачи для однородных сред, затем — кусочно-неоднородных (§ 3).

Уравнения ненасыщенно-насыщенной фильтрации вида

$$\phi_s \frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot K(s) K_0(\nabla p + e) = Q, \quad x \in \Omega,$$

$$s = S(p),$$

где  $K_0 = K_0(x)$  — тензор проводимости насыщенной среды, предлагается записывать в терминах новой неизвестной

$$u = \mathcal{U}(p) = \begin{cases} S(p), & p \leq p_\sigma, \\ S'(p_\sigma)(p - p_\sigma) + S(p_\sigma), & p > p_\sigma. \end{cases}$$

Здесь  $p_\sigma < 0$  — параметр метода. Функция  $\mathcal{U}$  является непрерывно дифференцируемой и имеет обратную  $\mathcal{P}$ .

По определению функция  $u = u(x, t) = \mathcal{U}(p(x, t))$  является “смешанной” (составной) неизвестной: если  $u(x, t) \leq s_\sigma$ ,  $s_\sigma = S(p_\sigma)$ , то  $u(x, t)$  совпадает с насыщенностью  $s(x, t)$ , иначе — с “нормированным” давлением  $S'(p_\sigma)(p - p_\sigma) + s_\sigma$ . По известной  $u$  однозначно определяется как  $p$ , так и  $s$ .

Если ввести функции переменной  $u \in [0, \infty)$ :

$$\mathcal{S}(u) = \begin{cases} u, & u \leq s_\sigma, \\ S((u - s_\sigma)/S'(p_\sigma) + p_\sigma), & u > s_\sigma, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}(u) = K(\mathcal{S}(u)), \quad \mathcal{D}(u) = K(\mathcal{S}(u))\mathcal{P}'(u), \quad \mathcal{Q}(u) = \int_0^u \mathcal{D}(u)du,$$

то исходные уравнения, после исключения  $s$ , приводят к уравнению для определения новой неизвестной:

$$\phi_s \frac{\partial \mathcal{S}(u)}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathcal{K}(u)K_0(\nabla \mathcal{P}(u) + e)) = Q.$$

Ему предлагается придать следующий вид:

$$\phi_s \frac{\partial \mathcal{S}(u)}{\partial t} - \nabla \cdot (K_0 \nabla \mathcal{Q}(u) + \mathcal{K}(u)K_0 e) = Q, \quad x \in \Omega.$$

Поскольку  $\mathcal{S}(u) = u$  при малых  $u$ , то во всем диапазоне параметров эти уравнения не имеют двойного вырождения. Аналогично преобразуются заданные для исходных уравнений начальное и краевые условия. Отмечаются достоинства полученной задачи.

Далее, в § 4, на основе метода конечных элементов с численным интегрированием, строится чисто неявная аппроксимация полученной задачи, описывается реализация метода Ньютона и отмечается его экономичность. Используется одинаковая аппроксимация как для  $u$ , так и для функций  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{K}$ . Это позволяет существенно упростить как вычисление невязки сеточного уравнения ( $R$ ), так и его матрицы Якоби ( $J$ ). Например, в случае однородной среды получается (посредством элементной сборки), что

$$\begin{aligned} R(u) &= D(\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}(\check{u})) + A\mathcal{Q}(u) + C\mathcal{K}(u) - F = 0, \\ J(u) &= D\mathcal{S}'(u) + A\mathcal{Q}'(u) + C\mathcal{K}'(u). \end{aligned}$$

Здесь  $u = (u_1, \dots, u_N)^T$  – вектор узловых параметров; для  $f = \mathcal{S}, \mathcal{Q}, \mathcal{K}$  полагается  $f(u) = (f(u_1), \dots, f(u_N))^T$ ,  $f'(u) = \text{diag}(f'(u_1), \dots, f'(u_N))$  – диагональная матрица; постоянная диагональная матрица  $D$  и матрицы  $A$ ,  $C$  являются конечно-элементными аппроксимациями (с численным интегрированием) соответственно линейных операторов

$$\frac{\phi_s}{\tau}(\cdot), \quad -\nabla \cdot (K_0 \nabla(\cdot)), \quad -\nabla \cdot (K_0 e(\cdot)).$$

Они могут быть вычислены лишь один раз в начальный момент времени.

Решению сеточных уравнений и управлению шагом интегрирования посвящен § 5. Заключительный § 6 посвящен описанию комплекса программ и результатов решения четырех тестовых задач, достаточно трудных для решения и входящих в стандартный набор задач для тестирования численных методов для модели Ричардса.

Результаты тестовых вычислений, которые сравнивались с результатами других авторов, позволяют утверждать, что предложенный нами метод эффективен для однородных пористых сред и пригоден для моделирования течений в неоднородных средах во всем диапазоне насыщенных.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построена неравновесная математическая модель влагопереноса в ненасыщенно-насыщенных пористых средах, обобщающая модели Л.А. Ричардса и Г.И. Баренблатта и учитывающая динамические и статические эффекты памяти. Доказана разрешимость соответствующих краевых задач.
2. Доказано существование, единственность, описаны качественные свойства частных решений уравнений, соответствующих предложенной модели, в виде бегущих волн пропитки.
3. Проведена верификация модели по результатам лабораторных экспериментов по одномерной гравитационной пропитке ряда пористых сред.
4. Разработаны численный метод и комплекс программ для решения задач ненасыщенно-насыщенной фильтрации.

## СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ахтареев А. А. Численное решение задачи релаксационной фильтрации // Итоговая научно-образовательная конф. студентов КГУ 2003 года. Тез. докл. Казань, изд-во КГУ, 2003. С. 96-97.
2. Ахтареев А. А. Моделирование неустойчивости инфильтрационных потоков в ненасыщенной пористой среде // Итоговая научно-образовательная конф. студ. КГУ 2004 года. Тез. докл. Казань, изд-во КГУ, 2004. С. 61-62.
3. Ахтареев А. А., Даутов Р. З. Метод смешанной переменной приближенного решения задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрации жидкости в пористой среде // Материалы VI Всероссийского семинара “Сеточные методы для краевых задач и приложения”. Казань, изд-во КГУ, 2005. С. 35-39.
4. Ахтареев А. А., Даутов Р. З. Метод смешанной переменной для моделирования ненасыщенно-насыщенных течений // Казань, изд-во КГУ. Ученые записки КГУ. Сер. физ.-мат. наук, Т.2. 2007. С. 58-72.
5. Ахтареев А. А., Даутов Р. З. Численное сравнение различных схем решения задачи ненасыщенно-насыщенной фильтрации // Материалы VII Всероссийского семинара “Сеточные методы для краевых задач и приложения”. Казань, изд-во Каз. мат. общества, 2007. С. 29-31.
6. Ахтареев А. А., Даутов Р. З. Верификация модели Баренблатта с двумя временами релаксации по экспериментальным данным для одномерной пропитки // Материалы VIII всероссийской конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения”. Казань, изд-во КГУ, 2010. С. 98-104.
7. Ахтареев А. А., Даутов Р. З. Метод решения задачи ненасыщенно-насыщенной фильтрации // Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Каз. гос. ун-та. 2003-2007 гг. / Под ред. А. М. Елизарова. Казань, изд-во КГУ, 2008. С. 318-328.
8. Даутов Р. З., Ахтареев А. А. Обобщение модели Баренблатта для описания течений в ненасыщенной пористой среде // Материалы VIII молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения - 2009”. Казань, изд-во Каз. мат. об-ва., 2009. Т. 39. С. 130-133.
9. Даутов Р. З., Ахтареев А. А. Модель Баренблатта с двумя временами релаксации для описания течений в пористых средах // Материалы VIII всероссийской конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения”. Казань, изд-во КГУ, 2010. С. 179-185.